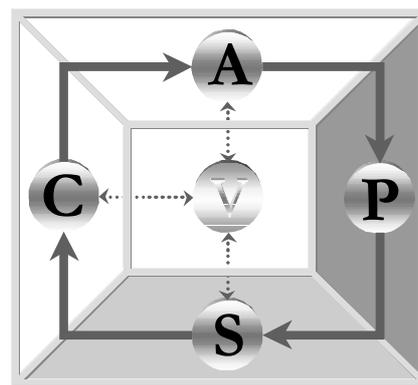
Instrumentação Industrial

Notas de Aula

Prof. Anísio Rogério Braga – DAAE – CEFET/MG
Profa. Carmela Maria Polito Braga – DELT/ UFMG

Os seres humanos têm uma necessidade forte de sentir, medir e testar coisas. A habilidade e capacidade para mensurar o estado de equilíbrio e movimento de sólidos, líquidos e gases e dos sistemas que eles constituem é extremamente importante para o entendimento e utilização das coisas e recursos do mundo real. O estudo da ciência de sensores e da instrumentação é, portanto, fundamental para permitir avanços nas ciências, tecnologia e na indústria. No contexto da engenharia, a instrumentação permite melhoramentos nos projetos de máquinas, equipamentos e processos graças a um conhecimento mais detalhado e preciso dos diversos processos físicos. Este conhecimento apurado permite um controle mais efetivo da produção possibilitando o uso mais racional da energia e melhoria na qualidade dos produtos.

No contexto de Controle e Automação Industrial é freqüente o uso de análises simplificadoras em que se consideram a instrumentação, tanto sensores quanto atuadores, como sendo componentes ideais e portanto relegados como "adendos auxiliares" no projeto de um sistema de controle. Entretanto, é importante ressaltar que a instrumentação é o elo de conexão entre o controlador e o processo e portanto deve ser abordada com a mesma importância dada ao projeto de controladores e estratégias de controle. Nesse sentido, há uma tendência moderna de se utilizar instrumentos com funções de validação, comercialmente referidos como instrumentos inteligentes, que incorporam além de funções de comunicação digital, mecanismos que visam robustecer as malhas de controle tais como: calibração automática, detecção e compensação de falhas, rótulos digitais para identificação automática, reconciliação de dados locais, etc.
O conhecimento de princípios e técnicas de medição, de conceitos associados aos instrumentos de medida (e.g. caracterização estática e dinâmica, calibração), e de procedimentos relacionados a segurança e instalação apropriada de instrumentos são fundamentais para técnicos e engenheiros de projeto, operação e manutenção que almejam obter sistemas de controle com bom desempenho, confiabilidade, e custos otimizados de instalação, operação e manutenção.

Este tutorial objetiva apresentar uma revisão de conceitos relacionados à instrumentação industrial, discutir o problema da medição envolvendo a análise de incerteza de medidas, verificar procedimentos de calibração, identificação de características estáticas e dinâmicas de instrumentos e propor um roteiro de experimentos de laboratório. Estes roteiros envolvem medição de peso (por meio de deformação com strain gages e células de carga), medição de nível (por meio de pressão de coluna d'água com cristal piezoresistivo e manômetro em U), medição de pressão (por meio de cristal piezoresistivo e manômetro tipo Bourdon), medição de temperatura (por meio de termopar e RTD).

Componentes básicos de uma malha de controle: Controlador, Atuador, Processo, Sensor e Validador

O tutorial está organizado em três seções:

1. **Na primeira seção** é apresentada uma revisão teórica dos conceitos relacionados com a Instrumentação Industrial, quais sejam, conceito de instrumentação, classes de aplicação de instrumentos de medida, definição de instrumento, definição das características estáticas dos

instrumentos (**precisão, exatidão, polarização, calibração, span, range, etc.),** caracterização dinâmica dos instrumentos, segurança intrínseca.

2. **Na segunda seção** é discutido o problema da medição, seu conceito e a análise de incerteza de medidas.

3. **A terceira seção** apresenta roteiros de experimentos de laboratório objetivando familiarizar os alunos com sensores industriais, seus princípios de medição, os circuitos eletrônicos utilizados para o tratamento dos sinais provenientes dos mesmos (amplificadores, filtros, conversores tensão/corrente), procedimentos de calibração, testes para identificação das características estáticas e dinâmicas dos instrumentos e análise destas respostas.

Revisão de Conceitos

Instrumentação: definição e classes de aplicação.

Processo Industrial é uma seqüência de operações, executadas por equipamentos, que transformam matéria prima em um produto final.

Existem sensores baseados em princípios físicos diversos que possibilitam medir as **variáveis de processo** básicas, quais sejam, temperatura, pressão, vazão de fluido, e nível, **propriedades físicas** tais como viscosidade, calor de combustão e densidade, e **composições** (fração de moles, concentrações).

Para o bom **desempenho** e **segurança** de um sistema de controle de processo é necessário que a medição dessas variáveis seja a mais **precisa** possível.

Sendo assim, a partir dos conceitos anteriores, pode-se definir a **Instrumentação Industrial** como sendo o conjunto de equipamentos (sensores, transmissores e hardware/software para procedimento de validação) que possibilitam a medição, monitoração e controle de variáveis de processo, propriedades físicas e composições dentro de um processo industrial.

Classes de Aplicação de Instrumentos de Medida:

- *Monitoração*: Algumas aplicações de instrumentos de medida tem a simples função de monitoração da variável medida, ou seja, suas medidas não são utilizadas para controle. Medidores de consumo de gás, água e energia elétrica utilizados em residências, são bons exemplos desta classe de aplicação. Mas mesmo alguns processos industrias ainda utilizam medidores para funções exclusivas de monitoração. Isto acontece quando uma estratégia de controle adequada ainda não está definida para o processo, ou quando a aplicação de técnicas de controle e automação ainda não é muito usual na área.

- *Análise Experimental de Engenharia:* Refere-se às aplicações onde a medição fornecida por algum instrumento tem uso destinado à uma análise pós-medição, para determinação de algum parâmetro, modelo e/ou validação do mesmo [Doeblin, 1990].

- *Controle de Processos:* o caso mais clássico, com o qual engenheiros e técnicos trabalham no dia a dia, relaciona-se à especificação de instrumentos de medida como elementos de uma malha de controle. Esta classe de aplicação é representada no diagrama de blocos mostrado na figura 1.

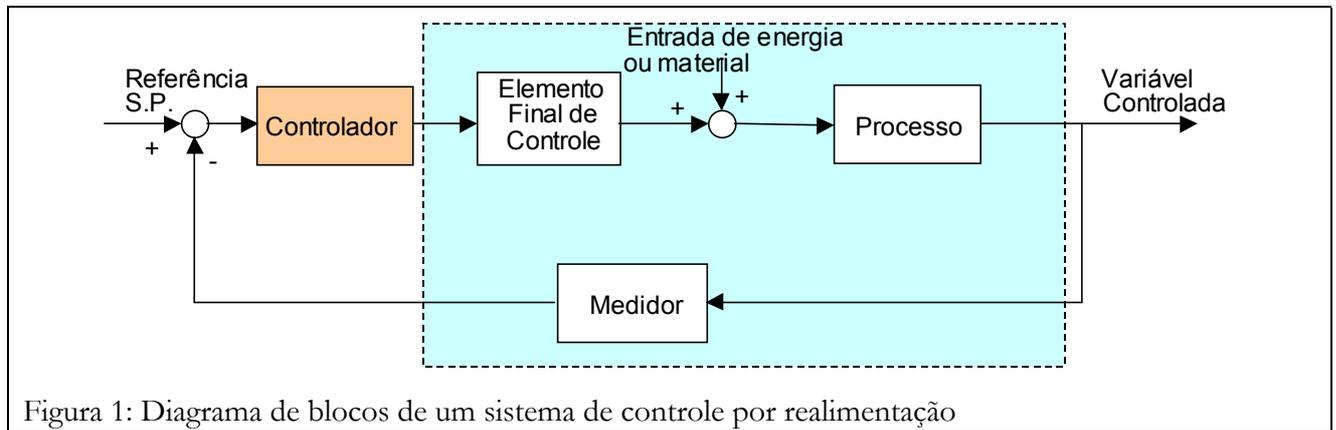



Figura 1: Diagrama de blocos de um sistema de controle por realimentação

Um exemplo clássico é uma malha de controle de nível de um tanque, como mostrado na figura 2, onde:

TQ, tanque reservatório de água, é o processo, do qual deseja-se controlar o nível;
L, o nível do tanque, é a variável controlada, e portanto, deve ser medida;
LT é o instrumento de medição de nível;
Fi , vazão de água afluente ao tanque TQ, é a variável manipulada;
FCV é o elemento final de controle, neste caso, uma válvula;
C é o controlador;

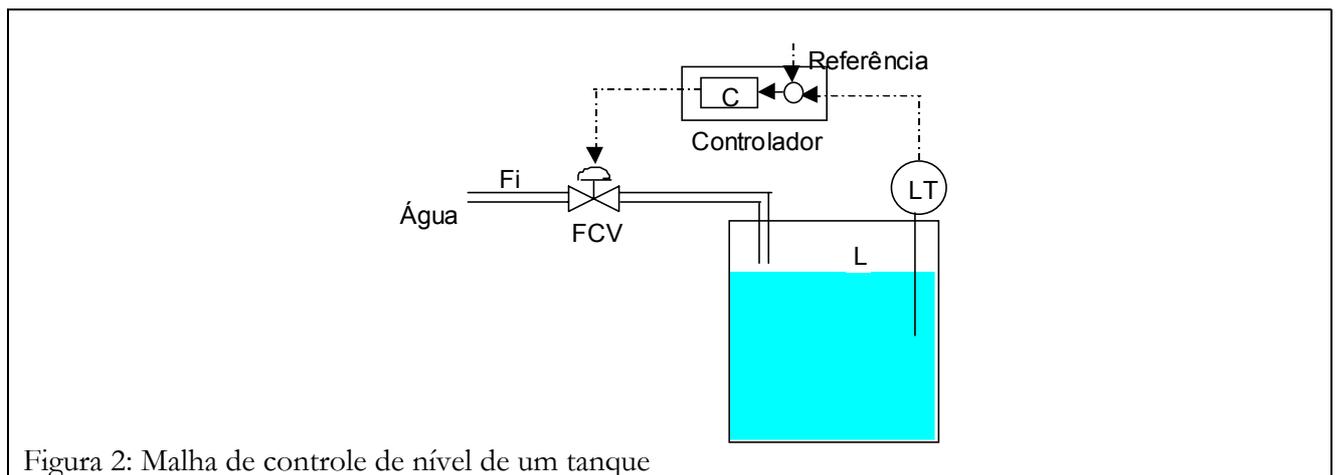



Figura 2: Malha de controle de nível de um tanque

Para qualquer classe de aplicação, a seleção de um instrumento de medida deve ser criteriosa, responsável e adequada aos objetivos definidos para a aplicação. Mas esta tarefa não é fácil. Ela demanda um amplo espectro de informações a respeito da instrumentação comercial disponível e de suas características técnicas, que precisam ser especificadas de acordo com as condições operacionais a serem impostas ao instrumento (tipo de instrumento e span, por exemplo) e com as demandas do processo em relação à medição (precisão e tempo de resposta, por exemplo). Em outras palavras, demanda-se um bom conhecimento do trabalho a ser desempenhado pelo instrumento e das características de desempenho passíveis de serem atingidas.

Definindo o instrumento de medida

O instrumento de medida incorpora:

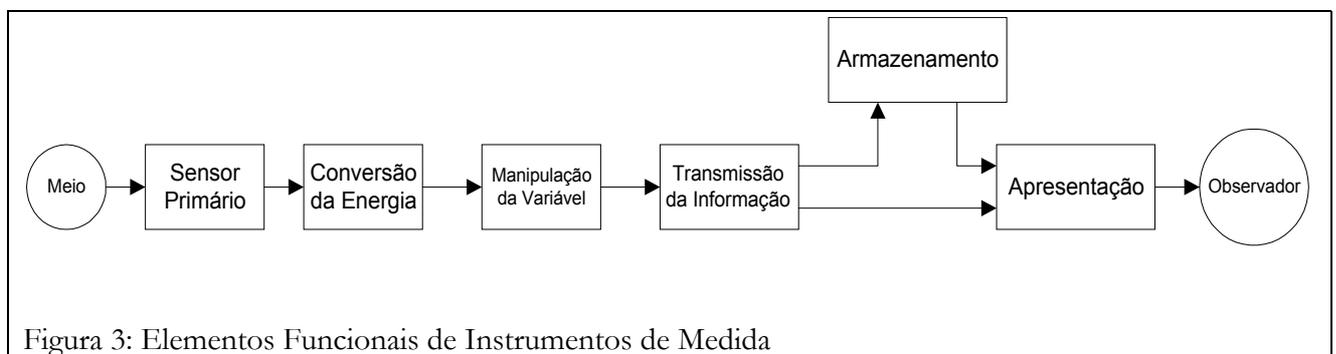
- Sensores
- Condicionador de Sinais
- Tratamento de Informação

* Apresentação ao observador na forma analógica, digital ou gráfica

Elementos funcionais de instrumentos de medida

A figura 3 apresenta um diagrama com os principais elementos envolvidos na medição e utilização de uma variável de processo. Nela são apresentados os elementos funcionais da medição, que são:

* **Sensor Primário:** é o elemento que primeiro recebe a ENERGIA do meio onde a medida é feita;
* **Conversão de Energia**: é nesse elemento que a variável medida é convertida em outra de mais fácil manipulação, sem entretanto modificar o conteúdo da informação original;
* **Manipulação da Variável**: é o elemento que produz uma mudança no valor numérico da variável preservando sua natureza física (amplificação de tensão, por exemplo);
* **Transmissão da Informação:** é o elemento que transfere a informação de um ponto do instrumento a outro;
* **Apresentação:** é o elemento que converte a informação em uma forma reconhecível por um dos sentidos do ser humano

Figura 3: Elementos Funcionais de Instrumentos de Medida

Transdutores

* **Transdutor Passivo:** é aquele em que a energia de saída é quase que interiamente fornecida pelo sinal de entrada; a energia de saída pode ser da mesma forma que a de entrada ou poderá haver conversão de uma forma para outra. Um exemplo de transdutor passivo é o manômetro tipo Bourdon, já que toda a energia usada para mover o tubo de Bourdon e o ponteiro vem da fonte de sinal.

* **Transdutor Ativo:** é aquele que necessita de uma fonte auxiliar de energia que fornece a maior parte da potência de saída, quando o sinal de entrada contribui com uma porção insignificante

Tipos de sinais em instrumentação

Analógico - sinais "contínuos" que podem ser pneumáticos (padrão de transmissão em pressão 3 a 15 psi) ou eletrônicos (padrão de transmissão em corrente, 4 a 20 mA e padrão de transmissão em tensão 1 a 5 Vcc). Outro tipo de sinal analógico bastante usado é o sinal em mV, obtido em termopares.

Sinais discretos - são sinais que só assumem dois estados: verdadeiro ou falso, aberto ou fechado. Esses sinais são provenientes de chaves de campo (chave de nível, de pressão, de temperatura, fim de curso), alarmes e sistemas de segurança.

Sinais digitais - A diferença entre *sinais discretos* e *sinais digitais* está bem clara na explicação de Oppenheim em [Oppenheim e Schafer, 1989]: sinais discretos são sinais oriundos de sinais analógicos

em que se faz uma *discretização no tempo***,** ao passo que sinais digitais envolvem discretização no *tempo e na amplitude.*

Características Estáticas dos Instrumentos

O desempenho estático dos instrumento de medida pode ser caracterizado a partir dos conceitos apresentados a seguir:

- **Calibração Estática:** Operação que tem por objetivo levar o instrumento de medição a uma condição de desempenho e ausência de erros sistemáticos, adequados ao seu uso.

- **Ganho:** O ganho é a relação entre a variação na saída e a variação unitária na entrada, ou o *span* da saída dividido pelo *span* da entrada.

Assim, para um transmissor eletrônico de temperatura com uma faixa de entrada de 100 a 200º C e uma saída de 4 a 20 mA, o ganho é:

$$ganho = \frac{20-4}{200-100}(mA/^{\circ}C) = 0{,}16(mA/^{\circ}C)$$

Faixa (Range): é a região entre os limites máximo e mínimo nos quais a quantidade medida, recebida ou transmitida pode variar. Toda variável medida e todo instrumento possuem um determinado range. Por exemplo, se um processo pode ter sua pressão variada entre 200 e 300 psi (Pounds per Square Inch, libras por polegada quadrada) deve-se requerer um instrumento que seja capaz de medir entre 100 e 400 psi. Isto é o instrumento possui um range com limite inferior de 100 e superior de 400 psi. *O range é determinado pelos valores máximos e mínimos.* Deve-se cuidar para que a especificação do instrumento propicie que o mesmo opere em torno de 30% da sua faixa máxima para o valor nominal da variável medida, evitando-se leituras no início e no final da escala onde a confiabilidade da medida é inferior.

Span é a diferença algébrica, isto é a "distância numérica" entre os limites inferior e superior do range. No exemplo mencionado acima o span do instrumento é de 300 psi.

Exatidão (Accuracy): indica o quanto o sensor é capaz de indicar um valor próximo do *valor real***.** A exatidão é indica em termos da "*inexatidão*", por exemplo: ±2 % ou +1% ou -3 %.
Obs.: Não há sentido em se falar de exatidão de um instrumento isoladamente. Deve-se levar em consideração o meio e as entradas (perturbações).

Precisão: é a medida da consistência do sensor e indica a sua *repetibilidade,* isto é qual a capacidade do sensor em indicar o mesmo valor, estando nas mesmas condições de operação, em um dado período de tempo.

Em geral, os instrumentos são especificados em termos de sua exatidão (accuracy) e não da sua precisão. A especificação informa o valor da exatidão em termos de percentagem em torno do valor exato (para mais ou para menos), isto é, informa o *desvio* que o instrumento pode proporcionar.

Por exemplo, um sensor de nível com exatidão de 10 cm , pode ter sua medida na faixa de ±10 cm em torno do valor real, isto é pode variar de 10 cm para mais ou para menos. Neste caso, uma indicação de nível de 3 m pode significar qualquer nível entre 2,9 e 3,1 m.

Ao contrário, precisão não é indicada pelo fabricante e está sempre na mesma direção, isto é o desvio será sempre para mais ou para menos. Um instrumento preciso pode informar o valor errado, mas ele é

consistente com essa informação. Logo o desvio provocado por um dispositivo preciso pode ser removido.

Bias (polarização) e Imprecisão: Um processo de calibração pode propiciar a decomposição do *erro total do processo de medição* em duas partes: *polarização (bias) e imprecisão.*

A polarização pode também ser chamada de *erro sistemático*, uma vez que será sempre a mesma para cada toda leitura realizada, e portanto pode ser removida pela calibração.

O erro causado pela imprecisão pode ser denominado *erro aleatório* **(***random error) ou não-repetibilidade* uma vez que é diferente para cada leitura. A soma da polarização e da imprecisão caracterizam a incerteza total de uma medida.

Portanto, a ***calibração** é o processo realizado para remover a polarização* (minimizando, assim, a incerteza da medida) e *definir a imprecisão numericamente*.

Em um experimento de calibração real, faz-se o valor verdadeiro da quantidade medida variar (em incrementos pré-definidos) ao longo da faixa de operação do medidor. Em geral, o procedimento inclui variações da entrada no sentido crescente e depois decrescente.

Repetibilidade: é a medida da capacidade de um instrumento repetir a mesma saída (medida) para um dado valor, quando a mesma entrada precisa é aplicada várias vezes. Existem duas definições matemáticas possíveis para repetibilidade:

$$Rp = \frac{máx - \min}{fundo\ escala} * 100$$

$$Rp = \frac{maior\ desvio - média}{fundo\ escala} * 100$$

Zona Morta: é a faixa onde o sensor não consegue responder. Ela define o valor necessário de variação do processo (da variável em medição) para que o medidor comece a percebê-lo.

Tempo Morto: é o tempo necessário para que o sensor comece a responder a alterações na variável medida (entrada).

Resolução: é menor mudança na entrada do sensor que irá resultar em uma mudança na saída do mesmo. A resolução dá uma indicação de quão pequena uma variação na entrada de energia pode ser percebida por um sensor.

Linearidade: pode ser especificada de várias formas. Uma maneira simples e usual é especificar a linearidade da reta de calibração de um sensor, traçada a partir da estimativa da melhor reta, pelo método dos mínimos quadrados, proveniente dos dados de entrada e saída do tal sensor para toda a faixa de medição.

Histerese: o efeito da histerese é notado em instrumentos que possuem comportamento diferente para entrada crescente em relação a entrada decrescente.

Carga do Instrumento: Um instrumento de medida (elemento primário) sempre extrai alguma energia do meio onde encontra-se instalado realizando suas medições. Sem isto seria impossível realizar a medição. Mas a grandeza medida é sempre perturbada pelo meio ou pelo ato da medição, o que torna uma medida perfeita, teoricamente, impossível de ser alcançada. Portanto, bons instrumentos devem ser projetados para minimizar este efeito.

Este efeito de carga do instrumento está associado à sua rigidez ou impedância de entrada, definida como:

$$Z_i = \frac{V_{esforço}}{V_{fluxo}}$$, onde $V_{esforço}$ é a variável de esforço e V_{fluxo} é a variável de fluxo,

e portanto, a potência drenada do meio é dada por:, ou seja, um instrumento deve ter uma alta impedância de entrada para drenar minimamente potência do meio.

Características Dinâmicas dos Instrumentos

A grande maioria dos sistemas reais são dinâmicos. Os instrumentos de medida também são sistemas como o são os processos industriais. Os sistemas dinâmicos sempre respondem à uma entrada qualquer (um sinal a ser medido ou uma perturbação) passando por uma resposta transiente antes de encontrarem sua condição de estado estacionário. Basicamente duas características definem a resposta dinâmica de um sistema: o tempo morto, ou atraso de transporte (tempo decorrido antes que o sistema comece a responder a uma dada entrada aplicada) e a constante de tempo (tempo necessário para a resposta do sistema atingir 63,2% do seu valor final de estado estacionário). Estas características definem o tempo de resposta do sistema, neste caso, do instrumento de medida. Pode-se, então, dizer que o tempo de resposta é o tempo requerido para o sensor responder completamente à uma mudança na sua entrada e corresponde a aproximadamente 4 vezes a constante de tempo do mesmo.

Embora as características que determinam o desempenho estático do instrumento, discutidas no ítem anterior, sejam muito importantes, elas não são suficientes para determinar o desempenho final do instrumento em sua aplicação. Se vamos especificar um instrumento para medir uma variável controlada de dinâmica rápida, precisamos de um instrumento de medida com velocidade de resposta maior que a da variável medida, caso contrário, a dinâmica do instrumento poderá interferir consideravelmente na dinâmica do sistema de controle da malha, introduzindo atrasos e provocando oscilações na resposta.

A análise do comportamento dinâmico de um instrumento pode ser feita a partir de um modelo matemático e/ou a partir de dados provenientes de testes aplicados no instrumento. A caracterização dos principais tipos de resposta dinâmica é feita a partir dos modelos matemáticos dos instrumentos, geralmente na forma de equações diferenciais. A ordem da equação diferencial define o tipo de resposta, por exemplo, de primeira ou de segunda ordem.

Um exemplo de um instrumento deste tipo é um termômetro de mercúrio.

Segurança Intrínseca

Em alguns processos industriais existem áreas consideradas de risco, devido à presença de substâncias potencialmente explosivas. O risco de ignição da atmosfera destas áreas está relacionado à simultaneidade de três condições:

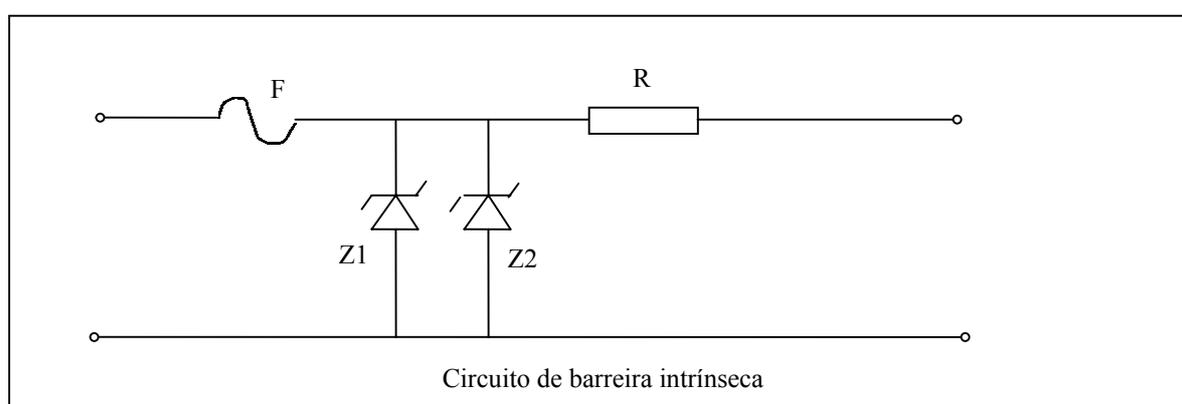
1. Presença de uma substância inflamável em estado e quantidade suficiente para formar uma atmosfera explosiva *(Combustível)*;
2. Existência de uma fonte de ignição com energia elétrica ou térmica suficiente para provocar a ignição *(Fonte de Ignição)*;
3. Existência de atmosfera em torno da fonte de ignição *(Comburente: ar ou oxigênio)*.

Para se evitar a ocorrência desta simultaneidade de condições causadora de explosões, pode-se optar por vários métodos de prevenção, quando for necessária a instalação de um instrumento ou equipamento eletro-eletrônico em uma área de risco. De uma maneira geral estes métodos baseiam-se em um dos seguintes princípios (Rossite, 1993):

- *Confinamento*: evita a detonação da atmosfera, confinando a explosão em um encapsulamento robusto, capaz de resistir à pressão desenvolvida durante uma possível explosão, evitando a propagação para áreas vizinhas.
- *Segregação*: visa separar fisicamente a atmosfera potencialmente explosiva da fonte de ignição. Instrumentos pressurizados utilizam este princípio. Além da pressurização, as técnicas de encapsulamento (para circuitos eletrônicos), imersão em óleo (para transformadores, disjuntores e similares) e enchimento com areia (proteção em leitos de cabos) utilizam o princípio da segregação.
- *Prevenção da ignição*: é o método mais elegante para se implementar proteção contra explosões. Baseia-se na limitação dos níveis de potência elétrica envolvidos na área. Os dispositivos de segurança intrínsica utilizam este conceito de prevenção.
- *Segurança Intrínseca:* os instrumentos com proteção baseada me segurança intrínseca têm o excesso de energia elétrica na forma de tensão e corrente, limitados através da inserção de dispositivos limitadores de energia, conhecidos como barreiras de segurança intrínseca, nos seus circuitos. Pode-se dizer que um circuito intrínsecamente seguro possui três componentes básicos: o dispositivo de campo a ser instalado na área de risco, a barreira de segurança intrínseca e a fiação de campo envolvida.

Para selecionar-se uma barreira adequada ao dispositivo de campo, este deve ser conhecido. Estes dispositivos são classificados basicamente em dois tipos: dispositivos simples (que não armazenam energia) e complexos (que armazenam energia) (norma ANSI/ISA-RP 12.6, 1987).

Para proteger o sistema de segurança intrínseca numa área de risco, um dispositivo limitador de energia deve ser instalado. Este dispositivo é conhecido como barreira ou sistema de segurança intrínseca associado. Sob condições normais, o dispositivo é passivo e permite o sistema de segurança intrínseca funcionar normalmente. Sob condições de falta, ele protege o circuito de campo prevenindo que o excesso de corrente e tensão atinja a área de risco.

Circuito de barreira intrínseca

A figura XX mostra um circuito de barreira. Pode-se observar que existem três componentes na barreira que limitam corrente e tensão: um resistor, pelo menos dois diodos zener (se um queimar, o outro atua) e um fusível. O resistor limita a corrente ao valor específico conhecido como corrente de curto circuito, Isc. Os diodos zener limitam a tensão ao valor referenciado como tensão de circuito aberto, Voc. O fusível abre quando o diodo conduz, abrindo o circuito e evitando a queima do diodo, bem como a transferência de qualquer excesso de tensão à area de risco.

Durante a análise do problema de segurança intrínseca de uma dada área de risco, é fundamental comparar os valores da entidade de um sistema intrínsecamente seguro (dispositivo de campo) com os do sistema associado (barreira), para definir a escolha da barreira adequada. Esses parâmetros são normalmente encontrados nas placas de caraterísticas dos instrumentos ou nos diagramas de fiação. Ver tabela 1.

Tabela 1: Comparação entre valores de entidades de um sistema intrinsecamente seguro (dispositivo de campo) e um sistema associado (barreira).

Característica do Circuito de Barreira	Barreira de Segurança	Dispositivo de Campo	Condição de Segurança Intrínseca
Tensão de circuito aberto	Voc	Vmax	Voc<=Vmax
Corrente de curto circuito	Isc	Imax	Isc<=Imax
Capacitância permitida	Ca	Ci	Ca>=Ci
Indutância permitida	La	Li	La>=Li

Os níveis adquados de tensão de circuito aberto e corrente de curto circuito são definidos a partir de curvas de ignição dos gases. Aplicações de segurança intrínseca deverão sempre estão abaixo destas curvas, onde o nível de energia de operação é de cerca de 1W ou menos. As curvas de capacitância e indutância também devem ser analisadas para a especificação de circuitos intrinsecamente seguros.

Um outro ponto importante a ser analisado na especificação de dispositivos intrinsecamente seguros é a operação correta do dispositivo de campo em condições normais. Em outras palavras, é preciso certificar-se de que o resistor limitador de corrente do circuito de barreira exercá sua função de proteção com segurança sem influenciar nas medições do intrumento em condições normais. O cálculo adequado desta queda de tensão, faz, portanto, parte da especificação de um instrumento de campo intrinsicamente seguro.

O Problema da Medição

Introdução

Medir uma grandeza física significa compará-la com uma outra grandeza do mesmo tipo, escolhida como termo de comparação ou padrão.

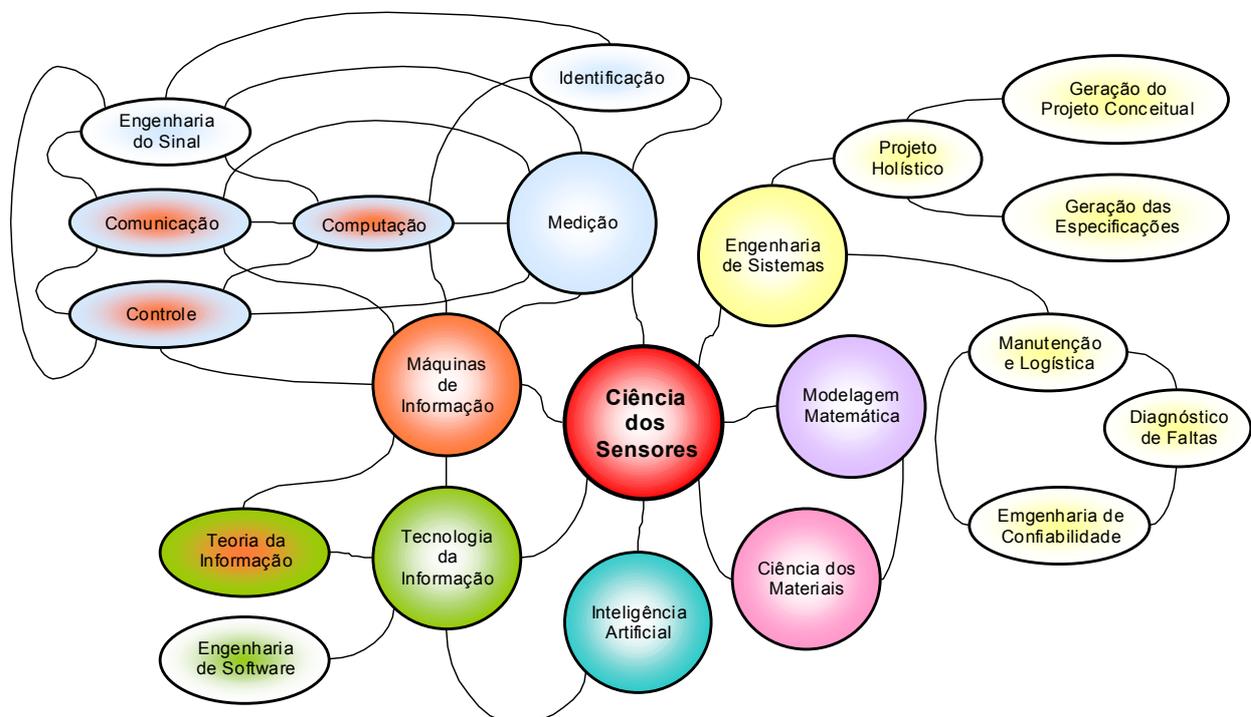



Diagrama de bolhas ilustrando as diversas disciplinas que compõem a Ciência dos Sensores.

Medição: é o relacionamento entre duas grandezas físicas, comparação. É um ato projetado para "obter informação quantitativa a respeito de" algum fenômeno físico através da comparação com uma

referência ou padrão [Hercerg, 1972, em Carr, 1996]. Medição é "atribuição de números para representar-se propriedades (físicas)" [Herceg, 1972].

Quando alguma grandeza física é medida com auxílio de algum instrumento que indica um determinado *valor numérico* surge a necessidade de se saber quão verdadeiro é esse valor numérico, isto é, quão próximo o número está da *medida verdadeira*[1].

Planejando um experimento: análise geral de incerteza

Antes de se realizar um experimento ou de se especificar um instrumento para determinada aplicação é necessário que se faça uma análise da viabilidade técnica da realização seja da medida ou do experimento como um todo. Por outro lado, se um experimento já foi realizado, é essencial saber a relevância ou validade do experimento. A base do estudo de viabilidade técnica e de validação de um experimento é a análise de incerteza das medidas. Para se entender os fundamentos da análise de incertezas é preciso entender como as medidas são realizadas e quais os componentes utilizados para medição.
Um instrumento ou sistema de medida é normalmente composto pelo encadeamento de vários componentes, cada um sujeito a uma incerteza individualmente. As medidas podem ser *diretas*, quando um sensor é utilizado diretamente para medir uma variável desejada, ou *indiretas* quando a variável desejada resulta de uma equação da física ou química do processo envolvendo mais de uma grandeza medida. Duas questões são freqüentemente colocadas sobre a incerteza:

1. Se a incerteza de cada componente de um instrumento é conhecida, como se calcula a incerteza total da medida?
2. Se a variável desejada resulta de uma equação cujas variáveis foram medidas com instrumentos diferentes (e.g. $P = \rho RT$, onde T é temperatura, P é pressão, R uma constante e ρ densidade), qual a incerteza da variável estimada dado que as incertezas de cada instrumento usado são conhecidas?

A resposta destas questões é obtida do cálculo diferencial e da estatística. Considere um caso genérico em que o resultado experimental, r, é uma função de n variáveis medidas, $r = r(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. A incerteza no resultado é dada por,

$$U_r^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 U_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 U_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial r}{\partial x_n}\right)^2 U_{x_n}^2 .$$

A expressão para o cálculo da incerteza é obtida da regra da cadeia de uma função de várias variáveis,

$$dr = \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots + \left(\frac{\partial r}{\partial x_n}\right) dx_n ,$$

que descreve a variação da medição em torno de uma medida (um ponto). Os termos d_x's são considerados os erros em cada variável e as derivadas parciais a magnitude com que cada erro, seja de componente ou de instrumento, contribui para o erro total na variável medida, r. Os erros individuais de cada variável são normalmente não correlacionados, por exemplo a parcela de erro devido a x_1 pode ser positiva enquanto a de x_2 pode se negativa e vice-versa ou ainda ambas podem ter o mesmo sinal. Entretanto essas parcelas de erro nas variáveis intermediárias do cálculo de *r* sempre resultam em erros dr. Neste caso a melhor estimativa do erro total é obtida da expectância de dr^2, ou seja

[1] Em geral, o *valor verdadeiro* a que se refere é desconhecido ou impossível de ser obtido na prática. Pode-se definir, entretanto, este valor verdadeiro (ou ideal) como sendo um valor que seria obtido a partir de um "experimento ideal".

$$E\left\{dr^2\right\} = E\left\{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)dx_2 + \cdots + \left(\frac{\partial r}{\partial x_n}\right)dx_n\right]^2\right\}.$$

O operador de expectância é um operador de média e portanto os termos cruzados da expansão do quadrado tendem a zero visto que eles são considerados não correlacionados. Assim tem-se

$$dr^2 = \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)dx_1\right]^2 + \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)dx_2\right]^2 + \cdots + \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x_n}\right)dx_n\right]^2$$

A equação de dr^2 descreve o erro quadrático absoluto e portanto é um valor com dimensão. Dividindo-se a expressão de dr^2 por r^2 obtém-se uma expressão admensional, o erro relativo, dado por

$$\left[\frac{dr}{r}\right]^2 = \left[\frac{x_1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)\right]^2\left[\frac{dx_1}{x_1}\right]^2 + \left[\frac{x_2}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)\right]^2\left[\frac{dx_2}{x_2}\right]^2 + \cdots + \left[\frac{x_n}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x_n}\right)\right]^2\left[\frac{dx_n}{x_n}\right]^2.$$

Os termos $\left[\frac{x_i}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)\right]^2$ são denominados *fator de amplificação da incerteza, FAI*, e são extremamente úteis no planejamento de um experimento ou análise de um resultado experimental.

Com uma expressão para o cálculo da incerteza pode-se responder a questões do tipo: "dado a incerteza dos instrumentos usados num experimento, qual a incerteza duma variável medida indiretamente?" e "se se deseja obter uma variável com uma precisão de x%, qual deve ser a precisão dos instrumentos usados para obtê-la indiretamente?"

Exemplo 1: Obter a expressão da incerteza (erro) para um experimento de determinação da densidade de um gás. A equação que descreve o princípio físico é $P = \rho RT$. As variáveis medidas são pressão e temperatura absoluta. A constante R é assumida ser conhecida com altíssima exatidão.

Solução: Primeiramente deve-se explicitar a variável a ser calculada,

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

e então calcula-se os fatores de amplificação da incerteza,

$$FAI_P = \frac{P}{\rho}\frac{\partial\rho}{dP} = \frac{P}{\rho RT} = 1 \text{ e } FAI_T = \frac{T}{\rho}\frac{\partial\rho}{dT} = \frac{T}{\rho}\left(\frac{-P}{RT^2}\right) = -1.$$

A incerteza na medida de ρ é então dada por,

$$\frac{U_\rho^2}{\rho^2} = \frac{U_P^2}{P^2} + \frac{U_T^2}{T^2}.$$

A equação acima relaciona a incerteza relativa no resultado experimental, ρ, com as incertezas relativas nas variáveis medidas, P e T. Neste exemplo conclui-se que as incertezas relativas das variáveis medidas diretamente afetarão igualmente o resultado calculado da densidade.

Exemplo 2: Um tanque pressurizado é mantido à temperatura ambiente (25C). Com qual exatidão pode-se determinar a densidade sabendo-se que a temperatura é medida com uma exatidão de 2C e a pressão do tanque é medida com uma incerteza relativa de 1%.

Solução: As incertezas são U_T = 2C = 2K; T=25C+273C = 298K, portanto a incerteza relativa da temperatura é U_T=2/298 e a incerteza da pressão é U_P=1/100 (ou seja 1%). Substituindo-se na expressão da incerteza do exemplo 1 tem-se

$$\frac{U_\rho^2}{\rho^2} = (0.01)^2 + \left(\frac{2}{298}\right)^2 = 1{,}45\times 10^{-4}, \text{ ou } \frac{U_\rho}{\rho} = 1{,}2\% .$$

Exemplo 3: Para o experimento do exemplo 2, suponha que a densidade é desejada com uma incerteza de 0.5%. Se a temperatura é medida com um exatidão de 1C, qual deve ser a precisão da media de pressão?

Solução: As incertezas são U_T = 1C = 1K; T=25C+273C = 298K, portanto a incerteza relativa da temperatura é U_T=1/298 e a incerteza da densidade desejada é U_ρ=0.5/100. Substituindo-se na expressão da incerteza do exemplo 1 tem-se

$$(0{,}005)^2 = \left(\frac{U_P}{P}\right)^2 + \left(\frac{1}{298}\right)^2, \quad \therefore \quad \frac{U_P}{P} = 0{,}37\% \ .$$

Assim sendo a medição da pressão terá de ser feita com uma incerteza menor que 0,37% para que a medida da densidade atenda à especificação.

Dica: Como discutido anteriormente, a incerteza relativa é extremamente útil tanto na fase de planejamento de um experimento quanto na análise dos resultados. Portanto é interessante tomar nota de mecanismos que facilitem o cálculo da incerteza relativa para o caso especial em que variáveis estimadas resultam de expressões com produto ou divisão de variáveis como no exemplo 1. Uma regra útil é denominada de derivação de logaritmos e baseia-se no fato de que $\frac{d\ln(r(x))}{dx} = \frac{1}{r(x)}\frac{dr}{dx}$. Use essa dica para obter a expressão para a derivada de $r = \frac{u}{v}$, que é $dr = \frac{vdu + udv}{v^2}$.

Exemplo 4: Obter a expressão da incerteza do exemplo 1. A equação que descreve o princípio físico é $P = \rho RT$. As variáveis medidas são pressão e temperatura absoluta.

Solução: Primeiramente deve-se explicitar a variável a ser calculada, $\rho = \frac{P}{RT}$, e então aplica-se o logaritmo em ambos os lados da equação, $\ln \rho = \ln\left(\frac{P}{RT}\right)$, que resulta em

$$\ln \rho = \ln(P) - \ln(RT)\ .$$

Derivando-se ambos os lados em relação ao tempo, *t*, tem-se,

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} - \frac{R}{RT}\frac{dT}{dt}.$$

Cancelando-se a variável *t*, tem-se

$$\frac{1}{\rho}d\rho = \frac{1}{P}dP - \frac{1}{T}dT\ .$$

A incerteza é obtida com a expectância estatística do quadrado da variação *dρ,* resultando em

$$\frac{U_\rho^2}{\rho^2} = \frac{U_P^2}{P^2} + \frac{U_T^2}{T^2}\ .$$

Exercício 1: A medição de deformação de uma asa de avião é comumente realizada utilizando-se resistores especialmente projetados, denominados "strain gauges", para serem colados sobre a asa que

se deseja conhecer a deformação. Os resistores ou strain-gauges colados na superfície da asa sofrerão a mesma deformação que a asa resultando em variação da resistência dos strain-gauges pois $R = \frac{\rho L}{A}$, onde ρ é a resistividade do material usado para fabricar o strain-gauge, L é o comprimento do strain-gauge e A sua área transversal.
Variações no comprimento da asa podem ser medidos com circuitos simples, uma ponte de Wheatstone é comumente usada. A tensão de saída de um circuito em ponte em que apenas um strain-gauge é utilizado para medir a deformação da asa pode ser escrita como

$$v_o = -GR_g \varepsilon V_{BB} \frac{R}{(R + R_g)^2},$$

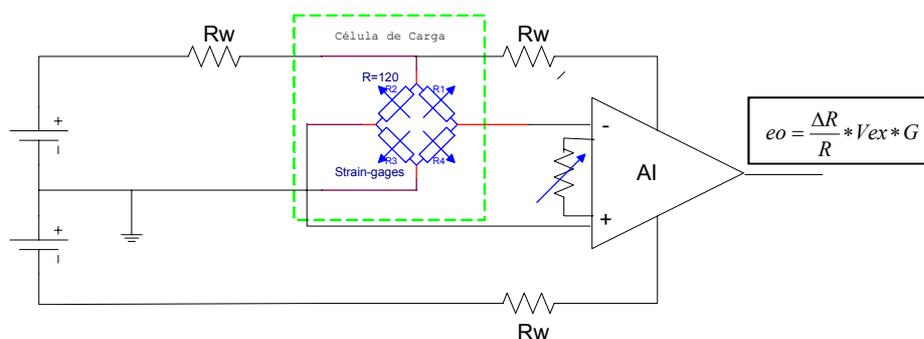
onde G é um fator de amplificação do strain-gauge, R_g é a resistência do strain-gauge, ε é a deformação (dL/L), V_{BB} é a tensão da bateria usada para alimentar o circuito e R é a resistência de resistores comuns usados no circuito em ponte.
Calcular, usando a regra de derivação dos logaritmos, a incerteza da deformação medida,

$$\varepsilon = \varepsilon(G, R_g, V_{BB}, R, v_o)$$

Considerações Práticas para Circuitos de Medição em Ponte

Como a maioria dos transdutores convertem uma grandeza física em resistência, capacitância ou indutância, os circuitos em ponte são de considerável interesse em instrumentação. Pode-se medir as *variações de resistência* na ponte por meio de dois *métodos*: o da *deflexão* e o do *nulo*.

Problemas de terra e alimentação de circuitos em ponte

1. Fonte comum alimentando todos os circuitos

onde:

Rw é a resistência do circuito (fio ou placa de CI) e
G é um ganho muito alto visto que:

- $\frac{\Delta R}{R}$ é, geralmente, muito menor que 2% - 0,02
- A ponte é um multiplicador analógico
- V_{ex} é a tensão aplicada à ponte e $V_{ex} \neq V_{cc}$ devido a variações da corrente de alimentação.
- As variações de V_{ex}, mesmo que pequenas, serão amplificadas igualmente às variações do strain gauge

Solução: Conectar um regulador de tensão entre $+V_{cc}$ e o comum, e alimentar a ponte (V_{ex}) por ele ou alimentar o amplificador de instrumentação por um ponto antes da ponte.

2. Interferências:
    - Campo eletromagnético: 60Hz (50Hz)
    - Ruido térmico: $V^2r=4KTBR$, onde: k é a constante de Boltzmam, T é a temperatura absoluta, B é a largura de faixa e R é a resistência.